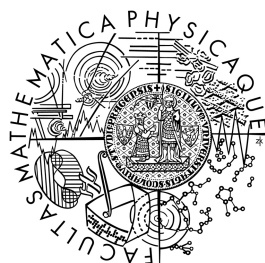


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Kateřina Divišová

## Shot Noise Cox Process

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Blažena Frcalová

Studijní program: Matematika, finanční matematika

2008

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí své bakalářské práce Mgr. Blaženě Frcalové za věnovaný čas, užitečné rady a přátelský přístup. Dále děkuji svým rodičům za jejich podporu během mého celého studia.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 1.8.2008

Kateřina Divišová

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Bodové procesy</b>	<b>7</b>
2.1	Bodové procesy . . . . .	7
2.2	Poissonovy bodové procesy . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Shot noise Cox process</b>	<b>15</b>
3.1	Základní poznatky o SNCP . . . . .	15
3.2	První a druhý moment . . . . .	21
3.3	Simulace SNCP . . . . .	24
3.3.1	Matérnův shlukový proces . . . . .	24
3.3.2	Thomasův proces . . . . .	26
3.3.3	Ztenčení . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Závěr</b>	<b>30</b>
	<b>Literatura</b>	<b>31</b>

Název práce: Shot Noise Cox Process

Autor: Kateřina Divišová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Blažena Frcalová

e-mail vedoucího: frcalova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Práce se zabývá popisem shot noise Coxova procesu, jeho vlastnostmi a ilustracemi některých příkladů. V první části textu jsou uvedeny základní poznatky o bodových procesech, neboť Coxovy procesy jsou jejich speciálním případem. Druhá část je věnována pouze shot noise Coxovým procesům. Kromě jejich definice se zde nachází popisy funkce intenzity a míry intenzity, vztah ke shlukovým procesům a vlastnosti vyplývající z momentů. Velký důraz je kladen na konkrétní modely stacionárních procesů (Matérnuv, Thomasův a shot noise G Coxův proces) a především na jejich simulace, k jejichž realizaci byl použit software R (knihovna **spatstat**).

Klíčová slova: Poissonův bodový proces, shot noise Coxův proces, simulace

Title: Shot Noise Cox Process

Author: Kateřina Divišová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Blažena Frcalová

Supervisor's email address: frcalova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This thesis deals with a description of shot noise Cox process, his characteristics and illustrations of some examples. There are mentioned basic knowledge about point processes in the first part, because Cox processes are their special case. The second part of the text is devoted to shot noise Cox processes. There are descriptions of intensity function and intensity measure, order characteristics and a relation to cluster processes. The big accent is put on the particular models of stationary processes (Matérn, Thomas and shot noise G Cox process) and especially on their simulations. Their implementation has been realized by software R (package **spatstat**).

Keywords: Poisson point process, shot noise Cox process, simulations

# Kapitola 1

## Úvod

Tato práce je určena všem zájemcům z široké veřejnosti, především však studentům vysokých škol se zaměřením na pravděpodobnost a matematickou statistiku. V textu se totiž předpokládá, že čtenář má primární znalosti v tomto oboru.

Základním pilířem tohoto článku jsou bodové procesy. Můžeme si je představit jako náhodné procesy, které vybírají body v prostoru. Zástupcem typických příkladů z praxe je např. rozmístění moučných molů (jedná se o pozice určitých objektů, viz. [7]). Bodový proces spočívá v tom, že v prostoru generuje náhodné události s určitou mírou intenzity, a jeden z jeho často užívaných zástupců je Poissonův bodový proces. Učebnicovými příklady jednorozměrného Poissonova procesu jsou příchody hovorů na telefonní ústřednu či výskyt nehod v jistém úseku silnice. Složitějšími problémy pak jsou modelování nervového systému, polyfonní hudební transkripce nebo teorie rizika a finanční matematiky. Jako zajímavost bych chtěla uvést, že Poissonův bodový proces byl definován Simeon-Denisem Poissonem (1781-1840).

Coxovy procesy, které zavedl sir David Roxbee Cox (\*1924), jsou pak přirozeným rozšířením Poissonova procesu. Často jsou nazývány dvojně stochastické, neboť míra intenzity Coxova procesu je náhodná (ne deterministická). S využitím znalostí o Coxových procesech se setkáváme např. v pojišťovnictví. Jako ukázkou si můžeme uvést model v pojistném kmeni, kde počty škodních událostí na jednotlivých pojistných smlouvách lze modelovat Poissonovým rozdělením, zatímco pojistný kmen je rizikově nehomogenní v tom smyslu, že různým pojistným smlouvám mohou příslušet rozdílné hodnoty parametru Poissonova rozdělení. Podrobně v [3].

Speciálním případem jsou pak shot noise Coxovy procesy, které jsou definovány tak, že funkce intenzity pomocného procesu má speciální tvar. Jejich definici zavedl v roce 2002 Jesper Moller. Díky svým vlastnostem jsou velmi důležité, jelikož se používají pro modelování celé řady shlukových procesů. Jako příklad můžeme jmenovat oceňování finančních derivátů (opcí, swapů) či časového nadměru škodního zajištění. Jako zajímavost bych chtěla uvést, že v roce 2005 J. Jang přednášel na konferenci Kvantitativní metody ve financích v Sydney právě o využití shot noise Coxových procesů při oceňování finančních derivátů.

# Kapitola 2

## Bodové procesy

V této kapitole si vybudujeme základní pilíře pro shot noise Coxovy procesy. Většinu poznatků jsem čerpala z [1].

### 2.1 Bodové procesy

Bodové procesy se obecně definují na úplných separabilních lokálně kompaktních metrických prostorech. Ve své práci se však omezím pouze na bodové procesy na  $d$ -rozměrném eukleidovském prostoru.

Nechť  $\mathcal{B}^d$  je systém borelovských podmnožin  $\mathbb{R}^d$  a  $\mathcal{B}_0^d \subset \mathcal{B}^d$  je systém omezených borelovských podmnožin. Prostor lokálně konečných podmnožin  $\mathbb{R}^d$  definujme jako  $N = \{\varphi \subseteq \mathbb{R}^d : \varphi(B) < \infty \forall B \in \mathcal{B}_0^d\}$ , kde  $\varphi(B)$  znamená počet bodů množiny  $\varphi \cap B$ . Zavedme  $\sigma$ -algebru na  $N$ :

$$\mathcal{N} = \sigma \left\{ \{\varphi \in N : \varphi(B) = m, m \in \mathbb{N}_0, B \in \mathcal{B}_0^d\} \right\}.$$

**Definice 1.** Bodový proces (*Point process*)  $\Phi$  je měřitelné zobrazení  $\Phi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (N, \mathcal{N})$ , kde  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  je pravděpodobnostní prostor. Rozdělení bodového procesu (*distribution*) je míra  $\Pi$  na  $(N, \mathcal{N})$  taková, že  $\Pi(U) = \mathbb{P}(\Phi \in U)$ ,  $U \in \mathcal{N}$ .

**Poznámka:** Takto jsou definovány tzv. jednoduché procesy (mají navzájem různé body). Obecně lze však bodové procesy považovat za náhodné celočíselné lokálně konečné míry (některé body se mohou započítávat s větší násobností).

**Definice 2.** Míra intenzity (*intensity measure*) bodového procesu  $\Phi$  je určena následovně

$$\Lambda(B) = \mathbb{E}\Phi(B), B \in \mathcal{B}^d. \quad (2.1)$$

Existuje-li hustota  $\lambda$  míry  $\Lambda$  vzhledem k Lebesgueově míře:

$$\Lambda(B) = \int_B \lambda(x) d(x), B \in \mathcal{B}^d, \quad (2.2)$$

pak  $\lambda$  nazýváme funkcí intenzity (*intensity function*).

**Poznámka:** Definice je v pořádku, neboť platí věta, že  $\Phi$  je bodový proces právě tehdy, když  $\Phi(B)$  je náhodná veličina pro každé  $B \in \mathcal{B}_0^d$ . Důkaz najdeme v [4].

**Definice 3.** Necht'  $\Phi$  je bodový proces. Pravděpodobnosti  $P(\Phi(B) = 0)$ ,  $B \in \mathcal{B}_0^d$  nazýváme prázdnými pravděpodobnostmi (*void probabilities*).

**Tvrzení 1.** Prázdné pravděpodobnosti bodového procesu  $\Phi$  určují jeho rozdělení.

*Důkaz:* Toto tvrzení je dokázáno v [4].

Dále si uvedeme definice důležitých vlastností bodových procesů, které použijeme pro charakteristiku Coxových procesů.

**Definice 4.** Bodový proces  $\Phi$  je stacionární (*stationary*), jestliže  $\Phi + y = \{x + y : x \in \Phi\}$  má stejné rozdělení jako bodový proces  $\Phi$  pro libovolné  $y \in \mathbb{R}^d$  (tzn. rozdělení  $\Phi$  je invariantní vůči posunutí). Bodový proces  $\Phi$  je izotropní (*isotropic*), jestliže jeho rozdělení je invariantní vůči rotacím kolem počátku v  $\mathbb{R}^d$ .

**Poznámka:** Je-li  $\Phi$  stacionární bodový proces s lokálně konečnou mírou intenzity  $\Lambda$ , pak  $\Lambda$  je násobkem Lebesgueovy míry. Toto tvrzení plyne z důsledku, že Lebesgueova míra je až na násobek jediná lokálně konečná translačně invariantní míra na  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ . Tudíž funkce intenzity je konstantní a rovna tomuto násobku, který se nazývá intenzita stacionárního bodového procesu (*intensity*).



## 2.2 Poissonovy bodové procesy

Nejprve si musíme zavést tzv. difúzní míru, která je nutnou podmínkou pro existenci Poissonových bodových procesů.

**Definice 5.** Míru  $\mu$  nazveme difúzní, jestliže platí  $\mu(\{x\}) = 0$  pro každé  $x \in \mathbb{R}^d$ .

**Definice 6.** Nechť  $\nu$  je difúzní konečná míra a  $B \in \mathcal{B}^d : 0 < \nu(B) < \infty$ . Nechť  $X_1, \dots, X_n, n \in \mathbb{N}$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory:

$$\mathbb{P}(X_i \in A) = \frac{\nu(A)}{\nu(B)}, A \subseteq B, A \in \mathcal{B}^d. \quad (2.3)$$

Potom  $\Phi^n = \{X_1, \dots, X_n\}$  označuje binomický bodový proces (*binomial point process*) o  $n$  bodech v  $B$ .

Je-li  $\nu$  násobkem Lebesgueovy míry, pak  $\Phi^n$  nazýváme homogenní binomický bodový proces.

**Poznámka:** Všimněme si, že z definice vyplývá, že není nutné, aby míra  $\nu$  byla normována.

**Definice 7.** Nechť  $\Lambda$  je difúzní lokálně konečná míra na  $\mathbb{R}^d$ . Poissonův bodový proces (*Poisson point process*)  $\Phi$  s mírou intenzity  $\Lambda$  je bodový proces  $\Phi$ , pro který platí:

(i)  $\Phi(B)$  má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\Lambda(B)$  pro každé  $B \in \mathcal{B}_0^d$

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = k) = \frac{\Lambda(B)^k}{k!} e^{-\Lambda(B)}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

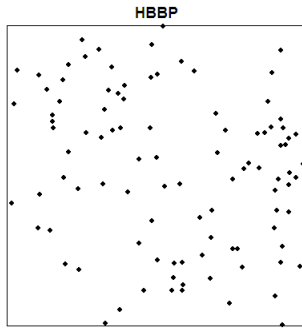
(ii)  $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_n)$  jsou nezávislé pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0^d$  po dvou disjunktní.

Existuje-li funkce intenzity  $\lambda$  a je-li konstantní, potom  $\Phi$  nazýváme homogenní Poissonův proces s intenzitou  $\lambda$ .

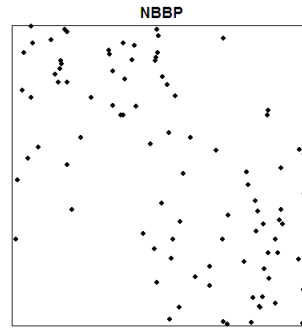
**Poznámka:** Homogenní Poissonův proces je stacionární a izotropní.

Binomické bodové procesy jsou příbuzné Poissonovým. Zatímco binomický generuje v jisté omezené části prostoru předem daný počet událostí, Poissonův náhodný počet. Nyní si na obrázcích č. 2.1 a 2.2 názorně ukážeme,

jak tyto procesy vypadají. Na obrázku 'HBBP' (Homogenní Binomický Bodový Proces) je nasimulovaný homogenní binomický bodový proces o 100 bodech v okně  $(0, 1) \times (0, 1)$  pomocí příkazu `runifpoint`. Obrázek 'NBBP' (Nehomogenní Binomický Bodový Proces) zobrazuje obecný binomický bodový proces - 100 nezávislých bodů rozdělených podle hustoty  $50 * |\sin(x - y)|$  v okně  $(0, 1) \times (0, 1)$ . Pro generování tohoto procesu jsem použila příkaz `rpoint`. Je zřejmé, že zatímco v homogenním případě jsou body rozloženy rovnoměrně, v obecném případě to neplatí.

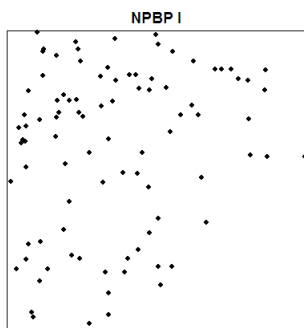


Obrázek č. 2.1

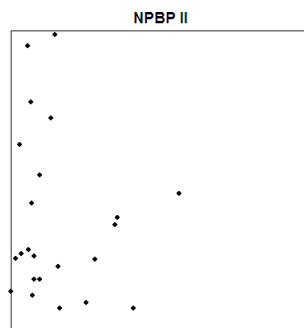


Obrázek č. 2.2

Na obrázcích č. 2.3 až 2.6 jsou znázorněny Poissonovy bodové procesy. Obrázky 'NPBP I' a 'NPBP II' (Nehomogenní Poissonův Bodový Proces) představují simulace nehomogenních s intenzitami  $\Lambda_I = 150e^{-2x^2}$  a  $\Lambda_{II} = 100e^{-5x}$  v okně  $(0, 1) \times (0, 1)$ . Program R k jejich generování používá metodu 'ztenčení' (příkaz `rpoispp`).

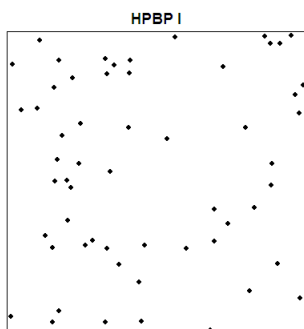


Obrázek č. 2.3

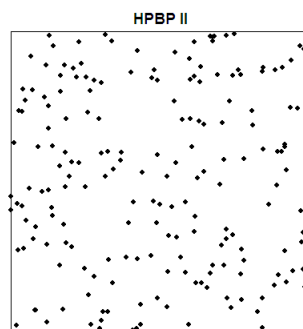


Obrázek č. 2.4

Obrázky 'HPBP I' a 'HPBP II' (Homogenní Poissonův Bodový Proces) znázorňují homogenní Poissonovy procesy s intenzitami  $\Lambda = 50$  a  $\Lambda = 200$ . Simulace názorně ukazují, že s rostoucí intenzitou roste počet bodů v daném okně  $((0, 1) \times (0, 1))$ .



Obrázek č. 2.5



Obrázek č. 2.6

**Věta 1.** Existuje jediný Poissonův bodový proces  $\Phi$  s mírou intenzity  $\Lambda$ .

*Důkaz:* Jednoznačnost plyne z tvrzení 1 (díky vlastnosti prázdných pravděpodobností:  $\mathbb{P}(\Phi(B) = 0) = e^{-\Lambda(B)}$ ,  $B \in \mathcal{B}_0^d$ ).

Existenci dokážeme pomocí konstrukce Poissonova bodového procesu  $\Phi$ . Zvolme  $0 \in \Phi$  a vytvořme si posloupnost  $\{T_i\}$  následujícím způsobem:

$$T_1 := b(0, 1) \text{ (jednotková koule), } T_i := b(0, i) \setminus b(0, i-1), i = 2, 3, \dots$$

Nechť  $N_i$  jsou náhodné veličiny pro  $i = 1, 2, \dots$ , které mají Poissonovo rozdělení s parametrem  $\Lambda(T_i)$  a jsou nezávislé. Za podmínky  $N_i = n_i$  generujeme binomický bodový proces  $\Phi_i = \{\xi_{i1}, \dots, \xi_{in_i}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , pro který platí, že  $\Phi_i$  jsou vzájemně nezávislé o  $n_i$  bodech a

$$\mathbb{P}(\xi_{ij} \in A | N_i = n_i) = \frac{\Lambda(A)}{\Lambda(T_i)}, \text{ kde } A \subseteq T_i \text{ a } j = 1, \dots, n_i.$$

Položme  $\Phi := \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\xi_{i1}, \dots, \xi_{in_i}\}$ . Dále platí:  $\Phi(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} 1_{[\xi_{ij} \in B]}$ , a tak  $\Phi$  je měřitelné zobrazení a tedy bodový proces.

Nyní stačí dokázat, že je Poissonův. Nechť  $B$  je omezená borelovská množina.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi(T_i \cap B) = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(N_i = n) \mathbb{P}(\Phi(T_i \cap B) = k | N_i = n) = \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\Lambda(T_i)]^n}{n!} e^{-\Lambda(T_i)} \frac{n!}{(n-k)!k!} \left( \frac{\Lambda(T_i \cap B)}{\Lambda(T_i)} \right)^k \left( \frac{\Lambda(T_i \setminus B)}{\Lambda(T_i)} \right)^{n-k} = \\ &= \frac{e^{-\Lambda(T_i)}}{k!} (\Lambda(T_i \cap B))^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\Lambda(T_i \setminus B)]^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{[\Lambda(T_i \cap B)]^k}{k!} e^{-\Lambda(T_i \cap B)}. \end{aligned}$$

Z toho tedy vyplývá, že  $\Phi(T_i \cap B)$  má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\Lambda(T_i \cap B)$ . Dále  $\Phi(B) = \sum_{i: T_i \cap B \neq \emptyset} \Phi(T_i \cap B)$  má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\Lambda(B)$ .

Nechť  $A, B$  jsou disjunktní borelovské množiny. Nezávislost náhodných veličin  $\Phi(T_i \cap A)$  a  $\Phi(T_j \cap B)$  pro  $i \neq j$  vyplývá z konstrukce  $T_n$ , pro  $i = j$  z následující rovnice:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\Phi(T_i \cap A) = k, \Phi(T_i \cap B) = l) = \\
&= \sum_{n=k+l}^{\infty} \mathbb{P}(N_i = n) \mathbb{P}(\Phi(T_i \cap A) = k, \Phi(T_i \cap B) = l | N_i = n) = \\
&= \sum_{n=k+l}^{\infty} \frac{[\Lambda(T_i)]^n}{n!} e^{-\Lambda(T_i)} \binom{n}{k} \binom{n-k}{l} \left( \frac{\Lambda(T_i \cap A)}{\Lambda(T_i)} \right)^k \left( \frac{\Lambda(T_i \cap B)}{\Lambda(T_i)} \right)^l \left( \frac{\Lambda(T_i \setminus (A \cup B))}{\Lambda(T_i)} \right)^{n-k-l} = \\
&= e^{-\Lambda(T_i)} \frac{(\Lambda(T_i \cap A))^k}{k!} \frac{(\Lambda(T_i \cap B))^l}{l!} \sum_{n=k+l}^{\infty} \frac{(\Lambda(T_i \setminus (A \cup B)))^{n-k-l}}{(n-k-l)!} = \\
&= e^{-\Lambda(T_i \cap A)} \frac{(\Lambda(T_i \cap A))^k}{k!} e^{-\Lambda(T_i \cap B)} \frac{(\Lambda(T_i \cap B))^l}{l!} = \\
&= \mathbb{P}(\Phi(T_i \cap A) = k) \mathbb{P}(\Phi(T_i \cap B) = l).
\end{aligned}$$

Využili jsme vztahu:

$$\begin{aligned}
& -\Lambda(T_i) + \Lambda(T_i \setminus (A \cup B)) = -\Lambda(T_i \cap (A \cup B)) = -[\Lambda(T_i \cap A) + \Lambda(T_i \cap B)]. \\
& \text{Z definice nezávislosti dvou náhodných veličin tedy vyplývá, že } \Phi(T_i \cap A) \text{ a } \\
& \Phi(T_i \cap B) \text{ jsou nezávislé. A tak } \Phi \text{ je Poissonův bodový proces.} \quad \square
\end{aligned}$$

**Tvrzení 2.** Nechť  $\Phi$  je Poissonův bodový proces s mírou intenzity  $\Lambda$ . Uvažujme pevně  $B \in \mathcal{B}^d$  takovou, že  $\Lambda(B) < \infty$ . Potom restrikce  $\Phi$  na  $B$  za podmínky  $\Phi(B) = k, k \in \mathbb{N}_0$  je binomický proces na  $B$  s mírou  $\Lambda$  a  $k$  body.

*Důkaz:* Nechť  $\Phi_B = \Phi \cap B$  značí restrikci  $\Phi$  na množinu  $B$ . Využijeme definice podmíněné pravděpodobnosti, pravděpodobnosti nezávislých jevů a Poissonova procesu a ukážeme, že pro libovolnou borelovskou  $A \subseteq B$  platí:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\Phi_B(A) = 0 | \Phi(B) = k) = \frac{\mathbb{P}(\Phi(A)=0, \Phi(B \setminus A)=k)}{\mathbb{P}(\Phi(B)=k)} = \frac{\mathbb{P}(\Phi(A)=0) \mathbb{P}(\Phi(B \setminus A)=k)}{\mathbb{P}(\Phi(B)=k)} = \\
&= \frac{\frac{(\Lambda(A))^0}{0!} e^{-\Lambda(A)} \frac{\Lambda(B \setminus A)^k}{k!} e^{-\Lambda(B \setminus A)}}{\frac{\Lambda(B)^k}{k!} e^{-\Lambda(B)}} = \frac{\frac{\Lambda(B \setminus A)^k}{k!}}{\frac{\Lambda(B)^k}{k!}} = \left( \frac{\Lambda(B \setminus A)}{\Lambda(B)} \right)^k
\end{aligned}$$

Prázdné pravděpodobnosti  $\mathbb{P}(\Phi_B(A) = 0 | \Phi(B) = k)$  určují rozdělení bodového procesu (podle tvrzení 1) a  $\left( \frac{\Lambda(B \setminus A)}{\Lambda(B)} \right)^k$  jsou právě prázdné pravděpodobnosti binomického bodového procesu o  $k$  bodech v  $B$ .  $\square$

**Definice 8.** Necht'  $\mathcal{M}$  je úplný separabilní metrický prostor, pro naše účely ho nadále budeme nazývat prostor kót (*mark space*). Kótový bodový proces (*marked point process*) je definován jako náhodná posloupnost  $\Phi_m = \{(X_n, M_n)\}$  taková, že  $\Phi = \bigcup_n X_n$  tvoří bodový proces na  $\mathbb{R}^d$  a  $M_n$  jsou náhodné prvky s hodnotami v  $\mathcal{M}$ .

Stacionární kótované procesy mají invariantí rozdělení vůči posunutím, která transformují body procesu, ale kóty zanechají.

# Kapitola 3

## Shot noise Cox process

### 3.1 Základní poznatky o SNCP

Coxovy procesy představují jednu z nejdůležitějších a především nejpoužívanějších tříd, kterými modelujeme shlukové bodové procesy, jenž mohou být způsobené např. (obyčejně nepozorovanou) různorodostí okolní náhody, a hrají hlavní roli v geostatistice a prostorové statistice. Většinu svých poznatků jsem čerpala z [2].

Stále uvažujeme  $d$ -rozměrný euklidovský prostor  $\mathbb{R}^d$ .

**Definice 9.** Nechť  $\Lambda_C$  je náhodná  $\sigma$ -konečná difúzní míra na  $\mathcal{B}^d$ . Coxův bodový proces  $\Phi_C$  s řídicí mírou  $\Lambda_C$  (*Cox point process with driving measure  $\Lambda_C$* ) je bodový proces  $\Phi_C$  takový, že podmíněně při  $\Lambda_C = \mu$  je  $\Phi_C$  Poissonův bodový proces s mírou intenzity  $\mu$ .

**Poznámka:** Coxovým procesům se také říká dvojně stochastické (*double stochastic*) Poissonovy procesy.

**Definice 10.** Nechť  $\Phi_C$  je Coxův bodový proces s řídicí mírou  $\Lambda_C$ . Existuje-li náhodné pole  $Z$ , které je hustotou míry  $\Lambda_C$  vzhledem k Lebesgueově míře, pak  $Z$  nazýváme řídicí funkcí Coxova procesu  $\Phi_C$ .

Pro míru intenzity Coxova procesu platí:  
$$\mathbb{E}\Phi_C(B) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\Phi_C(B)|\Lambda_C)] = \mathbb{E}\Lambda_C(B), B \in \mathcal{B}^d.$$

Podobně pro vyjádření rozptylu lze použít obecně platné vztahy pro dvojici náhodných veličin:

$$\begin{aligned} \text{Var}\Phi_C(B) &= \mathbb{E}[\text{Var}[\Phi_C(B)|\Lambda_C]] + \text{Var}[\mathbb{E}[\Phi_C(B)|\Lambda_C]] = \\ &= \mathbb{E}\Lambda_C(B) + \text{Var}\Lambda_C(B), B \in \mathcal{B}^d. \end{aligned}$$

Z těchto jednoduchých výpočtů je vidět, že pokud má Coxův a Poissonův bodový proces stejnou míru intenzity, pak Coxův má větší rozptyl pro počty bodů v jednotlivých množinách (shodný rozptyl mají jen v případě, že Coxův má degenerovanou řídicí míru intenzity a je vlastně Poissonův). Z tohoto vztahu také vyplývá, že čím větší je nejistota v řídicí míře intenzity, tím větší je rozdíl mezi těmito rozptyly.

**Příklad:** Coxův bodový proces s řídicí mírou ve tvaru  $\Lambda_M(B) = |B| \cdot X$ , kde  $X$  je náhodná veličina a  $B \in \mathcal{B}^d$ . Tento proces, který se nazývá smíšený (*mixed*) Poissonův proces, je stacionární s intenzitou  $\mathbb{E}X$ , neboť  $\mathbb{E}\Phi_M(B) = \mathbb{E}\Lambda_M(B) = |B|\mathbb{E}X$ .

Prázdné pravděpodobnosti Coxova procesu vypočteme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi_C(B) = 0) &= \mathbb{E}\mathbf{1}_{[\Phi_C(B)=0]} = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathbf{1}_{[\Phi_C(B)=0]}|\Lambda_C)] = \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{P}(\Phi_C(B) = 0|\Lambda_C)] = \mathbb{E}e^{-\Lambda_C(B)}, B \in \mathcal{B}^d. \end{aligned}$$

**Definice 11.** Shot noise Coxův proces (*SNCP*)  $\Psi$  je Coxův proces  $\Psi$  s řídicí funkcí  $Z$  ( $Z(\xi) \geq 0$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ), která má speciální tvar:

$$Z(\xi) = \sum_j \gamma_j k(c_j, \xi), \quad (3.1)$$

kde  $k(c_j, \cdot)$  je hustota  $d$ -rozměrného spojitého rozdělení a  $(c_j, \gamma_j) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$  jsou body kótovaného Poissonova bodového procesu  $\Phi$  na  $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ .

**Poznámka:** Pro zjednodušení budu kótovaný Poissonův bodový proces  $\Phi$  z definice 11 nazývat pomocný proces  $\Phi$  a jeho míru intenzity a funkci intenzity značit  $\Lambda_\Phi$  a  $\lambda_\Phi$ .

Pod pojmem jádro (*kernel*) budeme nadále v textu rozumět hustotu  $k$ .



Jak později ukážeme ve větě 2, funkce intenzity Coxova procesu  $\Psi$  ( $\lambda_\Psi(\xi) = \mathbb{E}Z(\xi)$ ) je dána rovnicí

$$\lambda_\Psi(\xi) = \int \gamma k(c, \xi) d\Lambda_\Phi(c, \gamma) \quad (3.2)$$

SNCP je bohatá třída modelů Coxových procesů, která zahrnuje jako speciální případy Neymanovy-Scottovy Poissonovy procesy, Poisson-gamma procesy a shot noise G Coxovy procesy. Na SNCP můžeme také nahlížet jako na rozsáhlou skupinu Poissonových shlukových bodových procesů. Výhodou SNCP je jejich struktura, která nám dovoluje jednoduše odvozovat různé užitečné a také obecné výsledky.

**Definice 12.** Nechť  $\Phi_p$  je bodový proces (*rodičovský proces, parent process*) a  $\Phi_X$  je konečný bodový proces (*dceřinný proces, daughter process*) pro každé  $X \in \Phi_p$ . Potom  $\Phi = \bigcup_{X \in \Phi_p} \Phi_X$  nazýváme shlukový bodový proces (*cluster point process*).

Pokud  $\Phi_p$  je Poissonův bodový proces a  $\Phi_X|\Phi_p$  jsou nezávislé bodové procesy, pak shlukový proces nazýváme Poissonův shlukový bodový proces (a budeme ho značit  $\Phi_{PC}$ ).

**Tvrzení 3.** Nechť  $\Phi_{PC}$  je Poissonův shlukový bodový proces a  $\Phi_X|\Phi_p$  je Poissonův proces s mírou intenzity  $\Lambda_X$  takový, že:

$$\Lambda_{PC}(B) = \sum_{X \in \Phi_p} \Lambda_X(B) < \infty \text{ s.j. pro každé } B \in \mathcal{B}_0^d.$$

Potom  $\Phi_{PC}$  je Coxův bodový proces s řídicí mírou  $\Lambda_{PC}$ .

*Důkaz:* Využijeme základních vlastností podmíněné střední hodnoty, definice Poissonova shlukového bodového procesu (nezávislost  $\Phi_X|\Phi_p$ ) a tvrzení 1 (prázdné pravděpodobnosti):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi_{PC}(B) = 0) &= \mathbb{E}[\mathbb{P}(\Phi_{PC}(B) = 0|\Phi_p)] = \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(\bigcap_{X \in \Phi_p} [\Phi_X(B) = 0] \mid \Phi_p\right)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{X \in \Phi_p} \mathbb{P}(\Phi_X(B) = 0|\Phi_p)\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{X \in \Phi_p} e^{-\Lambda_X(B)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{X \in \Phi_p} \Lambda_X(B)}\right] = \mathbb{E}e^{-\Lambda_{PC}(B)}, \text{ kde } B \in \mathcal{B}^0. \quad \square \end{aligned}$$

Jinými slovy toto tvrzení říká, že některé Poissonovy shlukové procesy jsou zároveň Coxovými procesy.

Již z definice Poissonova bodového procesu vyplývá, že požadujeme, aby pomocný proces  $\Phi$  byl určen lokálně konečnou difúzní mírou intenzity  $\Lambda_\Phi$ . To znamená, že  $\Lambda_\Phi(D)$  je definovaná pro omezené borelovské množiny  $D \subseteq \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ ,  $\Lambda_\Phi(D) < \infty$  a  $\Lambda_\Phi(\{(c, \gamma)\}) = 0$  pro všechna  $(c, \gamma) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ . Dále předpokládáme, že  $Z$  je skoro jistě lokálně integrovatelná:  $\mathbb{P}(\int_D Z(\xi) d\xi < \infty) = 1$  pro omezené borelovské množiny  $B \subset \mathbb{R}^d$ .

Často uvažujeme  $\Lambda_\Phi$  ve tvaru:

$$\Lambda_\Phi(D) = \int \int_{(c, \gamma) \in D} dc d\chi(\gamma) \quad (3.3)$$

kde  $\chi$  je lokálně konečná míra na  $(0, \infty)$ . Rovnice 3.3 je ekvivalentní s předpokladem, že rozdělení pomocného procesu  $\Phi$  je stacionární bodový proces. Z toho tedy vyplývá, že proces  $\{c_j\}$  je nezávislý na bodovém procesu shlukových intenzit  $\{\gamma_j\}$ . Dosazením zpět do rovnice 3.2 získáme nové vyjádření funkce intenzity procesu  $\Psi$

$$\lambda_\Psi(\xi) = \int k(c, \xi) dc \int \gamma d\chi(\gamma), \quad (3.4)$$

jestliže jsou oba integrály konečné.

A můžeme dostat více. Pokud je jádro invariantní vůči posunutí v  $\mathbb{R}^d$  (tzn.  $k(c, \xi) = k(\xi - c)$ <sup>1</sup>), pak platí, že  $Z$  (a odtud i  $\Psi$ ) je stacionární. To znamená, že jejich rozdělení jsou invariantní vůči posunutí v  $\mathbb{R}^d$ . Zkráceně mluvíme o stacionárním SNCP  $\Psi$ . Z této vlastnosti také vyplývá jednodušší vztah pro intenzitu (jestliže je integrál konečný)

$$\lambda_\Psi = \int \gamma d\chi(\gamma)$$

Pokud je jádro izotropní (tzn.  $k(\xi) = k(\|\xi\|)$ <sup>1</sup>), rozdělení  $\Psi$  je invariantní vůči otočení v  $\mathbb{R}^d$ .

---

<sup>1</sup>Zde zneužíváme značení.

**Poznámka:** Pokud máme stacionární bodový proces, pak jeho míra intenzity je násobkem Lebesgueovy míry. Z toho vyplývá, že funkce intenzity je konstantní a rovna právě tomuto násobku, který nazýváme intenzita stacionárního bodového procesu. Více podrobností v [1].

Nyní si uvedeme 3 typické příklady SNCP.

**Příklad:** Nejznámější příklad stacionárního SNCP  $\Psi$  je Neymanův-Scottové Poissonův proces.

Míra  $\chi$  je ve tvaru:

$$\chi((0, \infty)) = \chi(\{\alpha\}) > 0, (\alpha \text{ je parametr})$$

a intenzita procesu:

$$\lambda_\Psi = \alpha\kappa,$$

kde  $\kappa = \chi(\{\alpha\})$  je intenzita bodového procesu  $\{c_j\}$ .

Popíšme si dva nejvýznamnější matematické modely pro tento proces.

1. Matérnův shlukový proces

$$k(\xi) = \mathbf{1} [||\xi|| \leq r] / (\omega_d r^d)$$

je hustota rovnoměrného rozdělení na kouli v  $\mathbb{R}^d$  se středem 0 a poloměrem  $r > 0$  ( $b(0, r)$ ),  $\omega_d = \pi^{d/2} / \Gamma(1 + d/2)$  je objem jednotkové koule

2. Thomasův proces

$$k(\xi) = \frac{\exp(-||\xi||^2 / (2\omega^2))}{(2\pi\omega^2)^{d/2}}$$

je hustota  $d$ -rozměrného normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou a varianční maticí, která je násobkem jednotkové matice ( $N(0, \sigma^2 I)$ )

Oba procesy mají radiálně symetrické rozdělení bodů shluků, a tak  $k$  je izotropní (Věta 12. [1])

**Poznámka:** Nechtě máme shlukový proces  $\Phi$  a nechtě body dceřinných procesů jsou rozdělené s hustotou  $p$  na  $\mathbb{R}^d$ . Shlukový proces má radiálně symetrické rozdělení shluků, pokud pro všechny body dceřinných procesů  $x, r$

platí:  $p(x) = p(\|x\|) = p(r)$  <sup>2</sup>.

**Příklad:** "Shot noise G Cox process" je SNCP s  $\Lambda_\Phi$  ve tvaru 3.3, kde  $\chi$  je absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře s hustotou

$$f_{\kappa, \alpha, \tau}(\gamma) = \kappa \gamma^{-\alpha-1} e^{-\tau \gamma} / \Gamma(1 - \alpha), \quad \gamma > 0.$$

Pro parametry platí:  $\kappa > 0$ ,  $\tau \geq 0$  pokud  $\alpha < 1$  a  $\tau > 0$  pokud  $\alpha \leq 0$ . Toto omezení zajišťuje, že  $\Lambda_\Phi$  je lokálně konečná.

Funkce intenzity existuje pouze pro  $\tau \neq 0$  a je ve tvaru:

$$\lambda_\Psi(\xi) = \kappa \tau^\alpha \int k(c, \xi) dc.$$

Ve stacionárním případě se redukuje na  $\lambda_\Psi = \kappa \tau^\alpha$ .

Rozdělení pomocného procesu  $\Phi$  závisí na  $\alpha$  následovně:

Pokud je  $\alpha < 0$ , pak  $\Phi$  je speciální případ kótovaného Poissonova procesu. Konkrétně:  $\{c_j\}$  je stacionární Poissonův proces s intenzitou  $-\kappa \tau^\alpha / \alpha$ , kde  $\gamma_j$  jsou stejně rozdělené, nezávislé na  $\{c_j\}$  a mají gamma rozdělení s parametry  $-\alpha$  a  $\tau$ .

Pokud je  $0 \leq \alpha < 1$ , situace je o něco složitější, protože  $\{c_j\}$  není lokálně konečný, neboť  $\int_0^\infty f_{\kappa, \alpha, \tau}(\gamma) d\gamma = \infty$ . Díky tomu, že  $\{(c, \gamma) \in \Phi : c \in A\}$  a  $\{(c, \gamma) \in \Phi : c \in B\}$  jsou nezávislé pro disjunktní borelovské množiny  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ , můžeme pro jednoduchost předpokládat, že  $\{c_j\}$  je soustředěno na omezené borelovské množině  $B$  s Lebesgueovou mírou  $|B|$ . Pak  $\gamma_j$  určují nehomogenní Poissonův proces na  $(0, \infty)$  s funkcí intenzity  $|B| f_{\kappa, \alpha, \tau}$ , kde  $c_j$  jsou stejně rozdělené, nezávislé na  $\gamma_j$  a všechna  $c_j$  jsou rovnoměrně rozprostřena na množině  $B$ .

Poznámka: Název *shot noise G Cox proces* je odvozen od tzv. G-míry (gamma míry) na borelovské  $\sigma$ -algebře v  $\mathbb{R}^d$ :  $\mu_G(B) = \sum_j \gamma_j \mathbf{1}[c_j \in B]$

V případě, že  $\alpha = 0$ , dostaneme tzv. *Poisson-gamma proces*.

---

<sup>2</sup>Opět zneužíváme značení.

## 3.2 První a druhý moment

V tomto odstavci se zaměříme především na první dva momenty SNCP, protože jsou základními charakteristikami prostorových bodových procesů. Nejprve si však uvedeme obecné definice, které jsem čerpala z [1]. Definice míry intenzity a funkce intenzity jsou uvedené již v první kapitole.

**Definice 13.** Momentová míra  $n$ -tého řádu bodového procesu  $\Phi$  je:

$$M^{(n)}(A) = \mathbb{E} \sum_{X_1, \dots, X_n \in \Phi} \mathbf{1}_{[(X_1, \dots, X_n) \in A]}, A \in (\mathcal{B}^d)^n.$$

**Definice 14.** Faktoriální momentovou míru  $n$ -tého řádu bodového procesu  $\Phi$  definujeme vztahem:

$$\alpha^{(n)}(A) = \mathbb{E} \sum_{\substack{\neq \\ X_1, \dots, X_n \in \Phi}} \mathbf{1}_{[(X_1, \dots, X_n) \in A]}, A \in (\mathcal{B}^d)^n,$$

kde symbol  $\sum_{\substack{\neq \\ X_1, \dots, X_n \in \Phi}}$  znamená, že sčítáme přes  $n$ -tice navzájem různých bodů  $X_1, \dots, X_n$  procesu  $\Phi$ .

**Definice 15.** Nechť existuje hustota  $\lambda^{(n)}$  faktoriální momentové míry  $\alpha^{(n)}$  vzhledem k  $(nd)$ -rozměrné Lebesgueově míře. Hustotu  $\lambda^{(n)}$  nazýváme součinnou hustotou  $n$ -tého řádu.

**Definice 16.** Pokud existuje součinná hustota druhého řádu  $\lambda^{(2)}$  bodového procesu  $\Phi$ , pak párovou korelační funkci (*pair correlation function*) definujeme následujícím předpisem:

$$g(x, y) = \frac{\lambda^{(2)}(x, y)}{\lambda(x)\lambda(y)}, x, y \in \mathbb{R}^d : \lambda(x) > 0, \lambda(y) > 0.$$

**Poznámka:** Párová korelační funkce patří mezi charakteristiky druhého řádu a popisuje určitou závislost mezi body procesu. Je-li bodový proces  $\Phi$  stacionární, pak pro součinnou hustotu druhého řádu a pro párovou korelační funkci platí, že jsou funkcemi rozdílu  $x - y$ :

$$\lambda^{(2)}(x, y) = \lambda^{(2)}(x - y, 0) = \lambda^{(2)}(x - y)$$

$$g(x, y) = \frac{\lambda^{(2)}(x-y)}{\lambda^2} = g(x-y).$$

Je-li bodový proces  $\Phi$  izotropní, pak  $\lambda^{(2)}$  a  $g$  jsou funkcemi vzdálenosti  $x$  a  $y$ :

$$\lambda^{(2)}(x, y) = \lambda^{(2)}(\|x - y\|) \text{ a } g(x, y) = g(\|x - y\|).$$

Párová korelační funkce může nabývat hodnot v intervalu  $[0, \infty]$ .

Z výše uvedených definic vyplývá, že momentová míra prvního řádu splývá s mírou intenzity:  $M^{(1)} = \Lambda$  a součinná hustota prvního řádu je funkce intenzity:  $\lambda^1 = \lambda$ .

Nyní využijeme speciálního tvaru funkce intenzity  $Z$  (3.1) a tzv. Slivnyak-Meckeho věty a ukážeme si různé užitečné výsledky pro popis základních vlastností SNCP.

**Lemma 1.** Pro nezápornou měřitelnou funkci  $f$  platí:

$$\mathbb{E} \sum_{(c, \gamma) \in \Phi} f(\Phi \setminus (c, \gamma), (c, \gamma)) = \int \mathbb{E} f(\Phi, (c, \gamma)) d\Lambda_{\Phi}(c, \gamma) \quad (3.5)$$

a pro nezápornou měřitelnou funkci  $h$  platí:

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{\xi \in \Psi} h(\Psi \setminus \xi, \xi) \mid \Phi \right] = \int Z(\xi) \mathbb{E}[h(\Psi, \xi) \mid \Phi] d\xi. \quad (3.6)$$

**Věta 2.** Nechť  $\Psi$  je SNCP. Funkce intenzity existuje a je jednoznačně určena rovnicí

$$\lambda_{\Psi}(\xi) = \int \gamma k(c, \xi) d\Lambda_{\Phi}(c, \gamma) \quad (3.7)$$

za podmínky, že integrál je konečný pro všechna  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

Párová korelační funkce existuje a je jednoznačně určena rovnicí

$$g(\xi, \eta) = 1 + \beta(\xi, \eta) / (\lambda_{\Psi}(\xi) \lambda_{\Psi}(\eta)) \quad (3.8)$$

za podmínky, že integrál

$$\beta(\xi, \eta) = \int \gamma^2 k(c, \xi) k(c, \eta) d\Lambda_{\Phi}(c, \gamma)$$

je konečný pro všechna  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ .

Důkaz: Nejprve odvodíme tvrzení 3.7, což ihned plyne z 3.1 a z 3.5.  
 $\lambda_\Phi(\xi) = \mathbb{E}Z(\xi) = \mathbb{E} \sum_j \gamma_j k(c_j, \xi) = \int \gamma k(c, \xi) d\Lambda_\Phi(c, \gamma).$

Dále předpokládejme, že  $\beta(\xi, \eta) < \infty$  pro všechna  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ . Pak z právě dokázané rovnosti 3.7 a Jensenovy nerovnosti vyplývá, že  $\lambda_\Psi(\xi)^2 \leq \beta(\xi, \xi) < \infty$ , tedy  $\lambda_\Psi(\xi) < \infty$  pro všechna  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Nyní si upravíme rovnici 3.5 pro nezápornou měřitelnou funkci  $f$  následovně:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{j \neq k} f(\Phi \setminus \{(c_j, \gamma_j), (c_k, \gamma_k)\}, (c_j, \gamma_j), (c_k, \gamma_k)) = \\ & = \int \int \mathbb{E} f(\Phi, (c, \gamma), (c', \gamma')) d\Lambda_\Phi(c, \gamma) d\Lambda_\Phi(c', \gamma'). \end{aligned}$$

Tudíž platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z(\xi)Z(\eta)] &= \mathbb{E} \sum_{j \neq k} \gamma_j k(c_j, \xi) \gamma_k k(c_k, \eta) + \mathbb{E} \sum_j \gamma_j^2 k(c_j, \xi) k(c_j, \eta) = \\ &= \int \int \gamma k(c, \xi) \gamma' k(c', \eta) d\Lambda_\Phi(c, \gamma) d\Lambda_\Phi(c', \gamma') + \int \gamma^2 k(c, \xi) k(c, \eta) d\Lambda_\Phi(c, \gamma) = \\ &= \lambda_\Psi(\xi) \lambda_\Psi(\eta) + \beta(\xi, \eta). \end{aligned}$$

A pokud si uvědomíme, že párová korelační funkce je definována následovně:  $g(\xi, \eta) = \mathbb{E}[Z(\xi)Z(\eta)]/[\lambda_\Psi(\xi)\lambda_\Psi(\eta)]$ , je tím druhá část tvrzení dokázána.  $\square$

**Příklad:** Uvažujme stacionární Neymanův-Scottové proces  $\Psi$ . Aplikací předchozí věty dostaneme, že

$$\lambda_\Psi = \alpha\kappa, \quad g(\xi, \eta) = 1 + \varphi(\xi - \eta)/\kappa, \quad (3.9)$$

kde  $\varphi(\xi) = \int k(\eta)k(\xi + \eta) d\eta$  je hustota pro vzdálenost dvou nezávislých bodů, z nichž každý má hustotu  $k$ .

Pro Thomasův proces se hustota redukuje na

$$\varphi(\xi) = (4\pi\omega^2)^{-d/2} \exp[-\|\xi\|^2/(4\omega^2)].$$

Nyní uvažujme stacionární shot noise G Cox proces s  $\tau \neq 0$ . Pak

$$\lambda_\Psi = \kappa\tau^\alpha, \quad g(\xi, \eta) = 1 + \frac{1 - \alpha}{\kappa\tau^{\alpha+2}} \varphi(\xi - \eta). \quad (3.10)$$

Třída  $\{(\lambda_\Psi, g) : \kappa > 0, \alpha > 0\}$  získaná z 3.9 i třída  $\{(\lambda_\Psi, g) : \kappa > 0, \alpha < 1, \tau > 0\}$  vyplývající z rovnice 3.10 splňují

$\{(\lambda_\Psi, 1 + a\varphi) : \lambda_\Psi > 0, a > 0\}$ . Tudíž pro zadanou libovolnou funkci  $k$  nemůžeme tyto dvě třídy rozlišit.

Představme si například, že určíme neparametrický odhad  $\widehat{\lambda}_\Psi$  a  $\widehat{g}$  za předpokladu, že  $\Psi$  je stacionární bodový proces. Pak ale nerozeznáme, jestli tyto odhady jsou vhodné pro Neymanův-Scottové či pro G Cox proces.

### 3.3 Simulace SNCP

Na závěr se budeme zabývat simulacemi vybraných modelů shot noise Coxových procesů. V první části si na konkrétních příkladech ukážeme Matérnův shlukový proces a v druhé budeme zkoumat Thomasův. Ve třetí se zmíníme o metodě ztenčení.

K jejich konstrukci jsem využívala software **R** a především knihovnu **spatstat**. Tento program počítá s okrajovými efekty.

#### 3.3.1 Matérnův shlukový proces

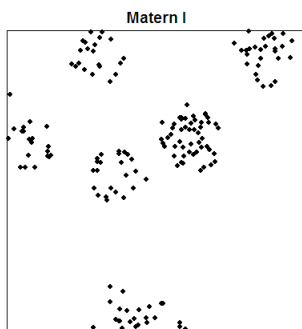
Jak jsme si uváděli již v kapitole [3.1], Matérnův shlukový proces je speciálním příkladem Neymanova-Scottového Poissonova procesu. Jádrem je hustota rovnoměrného rozdělení na kouli v  $\mathbb{R}^d$ . K jeho simulaci používáme v programu **R** příkaz **rMatClust**. Použitý algoritmus nejprve vygeneruje jeden Poissonův bodový proces s intenzitou  $\kappa$  (tzv. rodičovský). A pak každý rodičovský bod nahradí náhodným shlukem bodů, kde počet bodů v každém shluku má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\mu$  a tyto body jsou rozmístěny nezávisle a rovnoměrně uvnitř kruhu, jehož středem je původní rodičovský bod a poloměrem daný parametr  $r$ .

Na obrázcích č. 3.1.1 až 3.1.6 jsou zobrazeny Matérnovy shlukové procesy v okně  $(0, 1) \times (0, 1)$ , které se od sebe liší v hodnotách parametrů (intenzita Poissonova procesu shlukových středů  $\kappa$ , poloměr shluků  $r$  a střední počet bodů v jednotlivých shlucích  $\mu$ ).

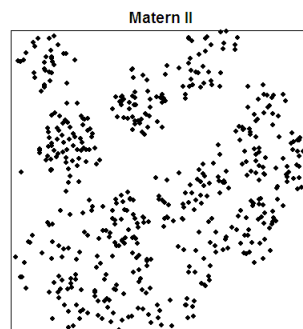
Na obrázku č. 3.1.1 je Matérnův proces s  $\kappa_I = 6, r_I = 0.1, \mu_I = 20$ , na obrázku č. 3.1.2 je  $\kappa_{II} = 20, r_{II} = 0.1, \mu_{II} = 20$ . Na těchto dvou obrázcích je nádherně vidět vliv intenzity Poissonova procesu shlukových středů  $\kappa$ . Čím větší  $\kappa$ , tím větší počet shluků v okně. Pokud je  $\kappa$  dostatečně velká, shluky začnou splývat (jako na obrázku č. 3.1.2). Obrázek č. 3.1.3 je proces s  $\kappa_{III} = 12, r_{III} = 0.05, \mu_{III} = 10$ . Na něm vidíme větší počet shluků, které



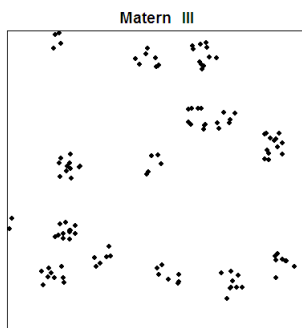
mají menší poloměr i počet bodů. Obrázek č. 3.1.4 nám slouží k ilustraci velkého průměru. Je zde nasimulovaný proces s  $\kappa_{IV} = 6, r_{IV} = 1, \mu_{IV} = 20$ . Díky vyšší hodnotě  $r$  shluky opět splývají. Naopak obrázek č. 3.1.5 má malé  $r$  ( $\kappa_V = 6, r_V = 0.01, \mu_V = 20$ ), takže body shluků jsou velmi blízko u sebe, až se zdá, že splývají. Na posledním obrázku (č. 3.1.6) je znázorněn proces  $\kappa_{VI} = 1, r_{VI} = 0.1, \mu_{VI} = 100$ .



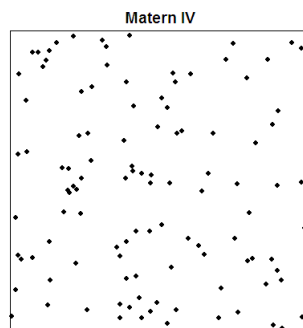
Obrázek č. 3.1.1



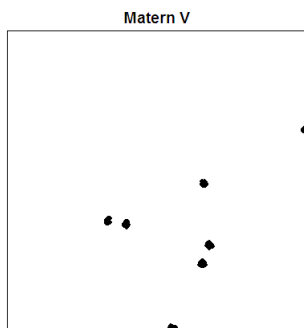
Obrázek č. 3.1.2



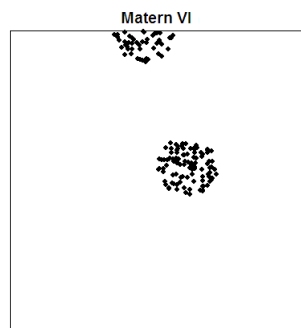
Obrázek č. 3.1.3



Obrázek č. 3.1.4



Obrázek č. 3.1.5



Obrázek č. 3.1.6

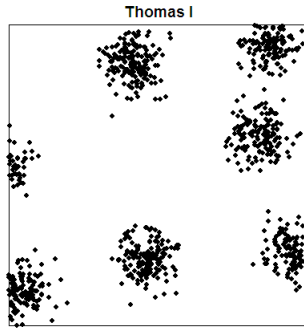
### 3.3.2 Thomasův proces

Thomasův proces je také speciálním příkladem Neymanova-Scottového Poissonova procesu (viz. 3.1). Jeho jádro je hustota  $d$ -rozměrného normálního rozdělení na kouli v  $\mathbb{R}^d$ . V programu R vyvoláme jeho simulaci příkazem `rThomas`. Zavedený algoritmus podobně jako u Matérnova shlukového procesu nejprve vygeneruje jeden rodičovský Poissonův bodový proces s intenzitou  $\kappa$ . A pak každý rodičovský bod nahradí náhodným shlukem bodů. Rozložení těchto bodů má izotropní Gaussovo rozdělení se směrodatnou odchylkou  $\sigma$  a počet bodů v každém shluku má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\mu$ .

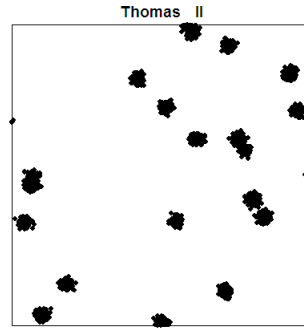
Na obrázcích č. 3.2.1 až 3.2.6 jsou zobrazeny Thomasovy procesy v okně  $(0, 1) \times (0, 1)$ . Budeme si na nich ukazovat vliv různých hodnot parametrů. Těmito parametry jsou intenzita Poissonova procesu shlukových středů  $\kappa$ , směrodatná odchylka rozprostření bodů od centra shluku  $\sigma$  a střední počet bodů ve shluku  $\mu$ .

Obrázek č. 3.2.1 představuje simulaci Thomasova procesu s  $\kappa_I = 4$ ,  $\sigma_I = 0.05$ ,  $\mu_I = 150$ . Je na něm názorně vidět charakteristická vlastnost tohoto procesu: koncentrace bodů v jednotlivých shlucích je největší uprostřed, směrem ke kraji shluku se snižuje. Na obrázku č. 3.2.2 je Thomasův proces:  $\kappa_{II} = 20$ ,  $\sigma_{II} = 0.01$ ,  $\mu_{II} = 150$ . V porovnání s 'Thomas I' je zde větší počet shluků, což je způsobené vyšší hodnotou  $\kappa$ . Dále se liší velikostí shluků, což je způsobené menším  $\sigma$ . To má za následek i to, že stejný počet bodů je rozprostřen do menšího prostoru, a tak se zdá, že body splývají. Obrázek

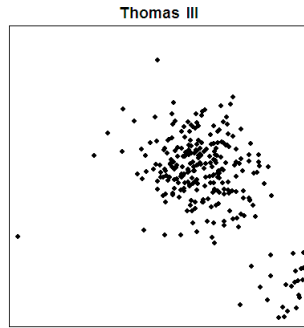
č. 3.2.3 je proces  $\kappa_{III} = 2, \sigma_{III} = 0.1, \mu_{III} = 250$ . Jedná se o menší počet shluků s větším rozptylem a také vyšším počtem bodů. Na obrázku č. 3.2.4 je  $\kappa_{IV} = 4, \sigma_{IV} = 0.1, \mu_{IV} = 150$ . Od obrázku 'Thomas I' se liší velikostí rozptýlu. Na obrázku č. 3.2.5 nejsou vidět žádné shluky, což je způsobeno velkým rozptylem ( $\kappa_V = 4, \sigma_V = 0.2, \mu_V = 150$ ). Poslední obrázek (č. 3.2.6) je podobný 'Thomas V', avšak nemají nic společného. Skutečnost, že ani na obrázku 'Thomas VI' nejsou znatelné shluky, je způsobena tím, že je zde nasimulovaný velký počet shluků s malým rozptylem a s malým počtem bodů ( $\kappa_{VI} = 200, \sigma_{VI} = 0.05, \mu_{VI} = 3$ ).



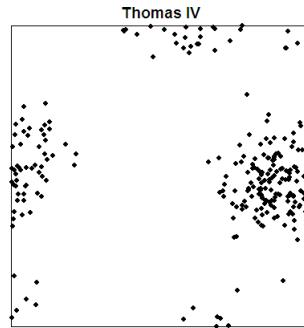
Obrázek č. 3.2.1



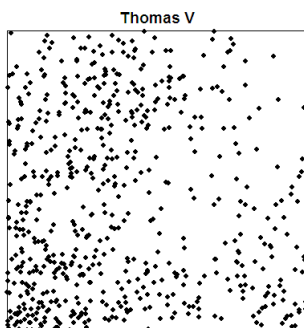
Obrázek č. 3.2.2



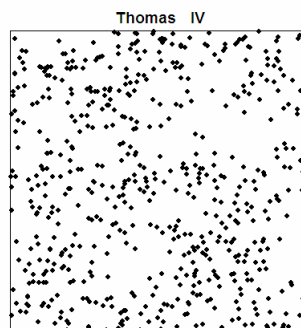
Obrázek č. 3.2.3



Obrázek č. 3.2.4



Obrázek č. 3.2.5



Obrázek č. 3.2.6

Na závěr bych chtěla shrnout rozdíl mezi Matérnovým a Thomasovým procesem. Zatímco body v shluku Matérnova procesu jsou rozloženy rovnoměrně, v Thomasově je jich největší koncentrace ve středu shluku a k jeho kraji se zmenšuje. Druhou zásadní odlišností je to, že u Matérnova procesu je dána maximální vzdálenost dceřinných bodů od svých rodičů ( $r$ ), zatímco u Thomasova žádná maximální vzdálenost neexistuje. Tyto jevy jsou právě způsobeny vlastnostmi jádra.

### 3.3.3 Ztenčení

Jen pro zajímavost bych chtěla ještě uvést pár slov o metodě, kterou nazýváme ztenčení (*thinning*). Tato operace je velmi známá a užívá se pro konstrukci procesů s tzv. pevným jádrem. Procesy s pevným jádrem nemají žádné dva body blíže než dané  $r > 0$ . Princip je v tom, že vyjdeme z Poissonova bodového procesu a některé body z něho vypustíme. Ztenčení může být buď nezávislé (to je v případě, že odebrání daného bodu nezávisí na ostatních bodech), nebo závislé.

V této části jsem čerpala poznatky z [1] a [5].

Jak jsem uvedla již v kapitole 2.2, ztenčení se užívá pro konstrukci nehomogenních Poissonových bodových procesů. Spočívá v tom, že nejprve vygeneruje homogenní Poissonův bodový proces s intenzitou, která je rovna maximu intenzity, ze které chceme simulovat. Poté vezme jednotlivě každý

bod tohoto procesu a s určitou pravděpodobností ho tam nechá, či vyhodí. Tato pravděpodobnost se počítá jako podíl chtěné intenzity v daném bodě a maxima intenzity.

Závislé ztenčení se využívá např. v definici Matérnových procesů s pevným jádrem.

**Definice 17.** Nechť  $\Phi$  je homogenní Poissonův bodový proces a  $r > 0$ . Matérnov proces s pevným jádrem typ I je definován vztahem:

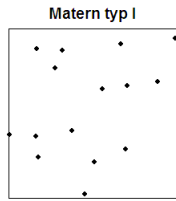
$$\Phi_I = \{X \in \Phi : \|X - Y\| > r \forall Y \in \Phi, Y \neq X\}.$$

Bodový proces

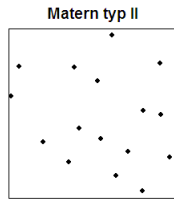
$$\Phi_{II} = \{X \in \Phi : U(X) < U(Y) \forall Y \in \Phi \cap b(X, r) \setminus \{X\}\},$$

kde  $\{U(Y), Y \in \Phi\}$  jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny, nezávislé na  $\Phi$  a rovnoměrně rozdělené na intervalu  $(0, 1)$ , nazýváme Matérnov proces s pevným jádrem typ II.

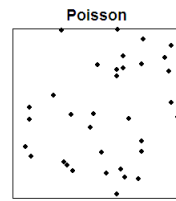
Pro ilustraci jsem v programu R pomocí příkazů `rMaternI` a `rMaternII` nasimulovala Matérnovy procesy s pevným jádrem. Na obrázku č. 3.3.1 je Matérnov proces s pevným jádrem typ I, intenzita Poissonova bodového procesu je 30 a daná vzdálenost 0.1. Obrázek č. 3.3.2 znázorňuje Matérnov proces s pevným jádrem typ II o stejných parametrech jako 'Matérn typ I'. A pro srovnání je na obrázku č. 3.3.3 uveden homogenní Poissonův bodový proces s intenzitou 30.



Obrázek č. 3.3.1



Obrázek č. 3.3.2



Obrázek č. 3.3.3

# Kapitola 4

## Závěr

Shot noise Coxovy procesy jsem si pro svou práci vybrala z toho důvodu, že jsou velmi zajímavé a přitom o nich neexistují žádné česky psané články. Jak jsem již zmínila v úvodu, SNCP jsou v dnešní době velmi oblíbeným tématem díky tomu, že se v praxi používají pro modelování celé řady situací. Kvůli charakteru bakalářských prací jsem se však musela omezit pouze na základní informace, neboť je to velmi široká látka. Například jsem se vůbec nezmínila o markovských vlastnostech SNCP. Přesto věřím, že tento text bude čtenáři zajímavým uvedením do této problematiky.

# Literatura

- [1] PAWLAS Z.: *Prostorové modelování, prostorová statistika (STP005)*, skripta, 2007.
- [2] MOLLER J.: *Shot noise Cox processes*, Advances in Applied Probability, 35, 614-640, 2002
- [3] MAZUROVÁ L.: *Matematické základy neživotního pojištění*, Matfyzpress, Praha, 1999.
- [4] RATAJ J.: *Bodové procesy*, Karolinum, Praha, 2000
- [5] R, help: *R*.
- [6] [http://www.statspol.cz/robust/2000\\_forbel00.pdf](http://www.statspol.cz/robust/2000_forbel00.pdf).
- [7] [http://tvlesak.me.cz/borova\\_siska/materialy/statistika/binomicke.doc](http://tvlesak.me.cz/borova_siska/materialy/statistika/binomicke.doc).